Roll No. .... Total Printed Pages - 8

F-3688

B.Sc. (Part - II) Examination, 2022

(Old/New Course)

MATHEMATICS

PAPER FIRST

(Advanced Calculus)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks:50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई - 1 / Unit - 1

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

Prove that every Cauchy sequence is bounded but the converse is not true.

(ब) दर्शाइये कि अनुक्रम $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, जहाँ

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$$ एकदिष्ट तथा अभिसारी l है तथा इसकी सीमा l है।

जहाँ $\frac{1}{2} < l < 1$.

Show that the Sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, where

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$$

is monotonic increasing and is bounded above by1 and so it is convergent and that its limit is l , where $\frac{1}{2} < l < 1$.

(स) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए।

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x > 0.$$

Test for convergence or Divergence of the following series.

$$\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.5}+................, x>0.$$

इकाई - 2 / Unit - 2

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी प्रतिबन्धी अभिसारी है

$$\sum(-1)^n \sin\frac{1}{n}$$

Prove the series $\sum(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ is conditionally convergent.

(ब) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=|x|$, $x=0$ पर संतत है, किन्तु $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है, जहाँ $|x|$ का अर्थ है, x का संख्यात्मक मान।

Prove that the function $f(x)=|x|$ is continuous at $x=0$, but is not differentiable at $x=0$, where the meaning of $|x|$ is the numerical value of x.

(स) मान लो दो चरों x, y का फलन f (x, y), xy – समतल (अर्थात् R^2) के एक क्षेत्र D में परिभाषित है, मान लो L एक रेखा-खण्ड है, जिसके सिरे (a, b) व (a + h, b + k) हैं। मान लो L क्षेत्र D में स्थित है और L के सभी बिन्दु संभवतः सिरों को छोड़कर D के आंतरिक बिन्दु हैं और

यदि-

(i) f(x, y), L के सभी बिन्दुओं पर संतत है,

(ii) f(x, y) L के सभी बिन्दुओं पर संभवतः सिरों को छोड़कर संतत आंशिक अवकलन रखता है, तथा एक वास्तविक संख्या θ का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)$$

$$= h\frac{\partial}{\partial x}f(a+\theta h,b+\theta k)+k\,{\partial}/{\partial y}\,f(a+\theta h,b+\theta k)$$

जहाँ $0<\theta<l$ सिद्ध कीजिए।

Let f(x, y) be a function of two independent variables x and y defined in a region D of xy-plane. Let L be a line segment whose end points are (a, b) and (a + h, b + k). Let L be contained in the region D and all points of L, except possibly end points, are interior points of D and if

(i) f(x, y) is continuous at every point of L.

(ii) f (x,y) possess continuous partial derivatives i.e. ${\partial f}/{\partial x}, {\partial f}/{\partial y}$ exist at every point of L, except possibly end points, then there exists a real number θ such the

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=h\frac{\partial}{\partial x}f(a+\theta h,b+\theta k)$$
$$+k\,\partial/\partial y\,f(a+\theta h,b+\theta k)$$

where $0<\theta<1$. Prove.

इकाई - 3 / Unit - 3

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ यदि इसका अस्तित्व है, तो अद्वितीय है।

Prove that $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, if it exists is unique.

(ब) समीकरण $\sin^2 2z\,\frac{d^2y}{dz^2}+\sin 4z\,\frac{dy}{dz}+4y=0$ का रूपान्तरण $\tan z=e^x$ रख कर कीजिए।

Transform the equation:

$\sin^2 2z\,\frac{d^2y}{dz^2}+\sin 4z\,\frac{dy}{dz}+4y=0$ by putting $\tan z=e^x$

(स) यदि f(x, y) और उनके सभी आंशिक अवकलज बिन्दु (x, y) के किसी प्रक्षेप में परिमित और संतत् है, तो f(x + h, y + k) का प्रसार h तथा k की धातों में कीजिए।

if f(x, y) and all its partial derivatives are finite and continuous in a certain domain of (x, y) then to expand f(x + h, y + k) in powers of h and k.

इकाई - 4 / Unit - 4

4. (अ) सरल रेखाओं $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जबकि $a^2+b^2=c^2$ तथा c एक अचर है।

Find the envelope of the straight lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ when $a^2+b^2=c^2$ and c is a constant.

(ब) फलन $u=x^3y^2(1-x-y)$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Discuss the maximum or minimum value of $u=x^3y^2(1-x-y)$.

(स) यदि $x+y+z=a$ हो, तो $x^m\,y^n\,z^p$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

If $x+y+z=a$, then find the maximum value of $x^m y^n z^p$

इकाई - 5 / Unit - 5

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Show that

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

(ब) $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p \, dx$ को बीटा फलन के पदों में व्यक्त कीजिए। अतः $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Express $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p \, dx$ in terms of the beta function and hence evaluate $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} \, dx$

(स) सिद्धी कीजिए

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y+2z) \, dxdydz.$$

Evaluate:

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y+2z) \, dxdydz.$$